**Задачи № 14 геометрия Профильный уровень.**

В-2 (2016)

В кубе ABCDA1B1C1D1 все ребра равны 3. На ребре BB1 отмечена точка К так, что КВ=4. Через точки К и С1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD1:

а) Докажите, что AP1:PB1 = 3:1, где Р – точка пересечения плоскости α с ребром A1D1/

б) Найти угол наклона плоскости α и плоскости грани BB1C1C.

**Решение:**

D1

B1

А1

D

C

B

А

C1

F

P

K

так как – общий, – как соответственные углы, то =

=

=75, =

Составим уравнение плоскости:

Ответ: .

В-3(2016)

В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами АВ=√11 и ВС = 2√3. Длины боковых рёбер пирамиды SA = 5, SB = 6, SD = √37.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

S

D

C

B

А

**Решение.**

**а)** 1. Рассмотрим треугольник SAB со сторонами http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image001.gif, http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image002.gif, http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image003.gif. Так как http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image004.gif, то треугольник SAB – прямоугольный с гипотенузой SB и катетами http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image005.gif.

2. Рассмотрим треугольник SAD. Его стороны http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image007.gif, http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image008.gif, http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image009.gif. Можно заметить, что

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image010.gif,

следовательно, треугольник SAD прямоугольный с гипотенузой SD и катетами http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image011.gif.

3. Так как http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image005.gif и http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image011.gif, то ребро http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image012.gif и, следовательно, SA – высота пирамиды.

**б)** По теореме о трех перпендикулярах http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image013.gif. Угол между гранью SC и плоскостью ASB будет равен углу CSB.

Рассмотрим прямоугольный треугольник SBC. Тангенс угла CSB равен

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image014.gif.

Следовательно,

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/3_14.files/image015.gif,

который соответствует углу между прямой SC и плоскостью ASB.

Ответ: 300

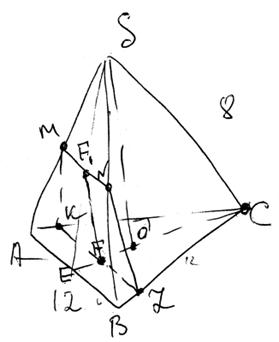
В – 4(2016)

В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания АВ равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки М и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость a содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость a делит медиану СЕ основания в отношении 5:1, считая от точки С.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка С, а основанием — сечение пирамиды SABC плоскостью a.

**Решение.**



**а)** В основании правильной треугольной пирамиды лежит равносторонний треугольник. Проекция высоты S пирамиды на основание дает точку O, которая лежит на пересечении медиан. Таким образом, точка O делит медианы в отношении 2:1, то есть

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image001.gif.

Рассмотрим высоту SE. Точка http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image003.gif, расположена точно по центру высоты SE. Следовательно, ее проекция на медиану CE делит отрезок OE пополам. В свою очередь отрезок http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image004.gif, тогда

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image005.gif.

В итоге получаем, что точка F делит медиану CE как

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image006.gif

или в соотношении 5:1, начиная от точки C.

**б)** Найдем высоту пирамиды CF, которая равна http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image007.gif. Длину медианы СЕ найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника BCE:

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image008.gif

и

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image009.gif.

Следовательно,

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image010.gif.

Вычислим площадь основания пирамиды (площадь трапеции MNZK). Отрезок http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image011.gif, отрезок http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image012.gif (так как это средняя линия треугольника ABS), высота трапеции http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image013.gif. Найдем высоту SO из прямоугольного треугольника SOC:

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image014.gif,

тогда

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image015.gif.

Площадь трапеции (основания пирамиды) равна

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image016.gif.

Объем призмы найдем по формуле

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/4_14.files/image017.gif

Ответ: .

В – 5(2016)

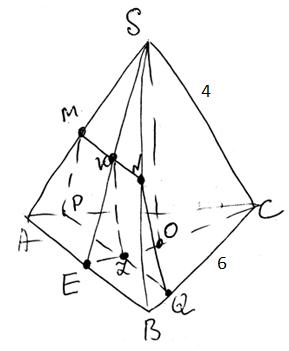
В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания АВ равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки М и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость a содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость a делит медиану СЕ основания в отношении 5:1, считая от точки С.

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды SABC плоскостью a.

**Решение.**

**а)** Сечение (плоскость http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image001.gif) проходит через точки M и N, причем http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image002.gif - средняя линия. Это означает, что отрезок http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image003.gif. По условию секущая плоскость перпендикулярна плоскости ABC, следовательно, она пересекает плоскость ABC по уровню PQ, причем http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image004.gif. Таким образом, секущая плоскость представляет собой трапецию PMNQ.



Рассмотрим прямоугольный треугольник SOE, где SO – высота правильной пирамиды. Точка O лежит на пересечении медиан правильного треугольника (в основании пирамиды) и делит их в отношении 2:1, то есть

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image006.gif.

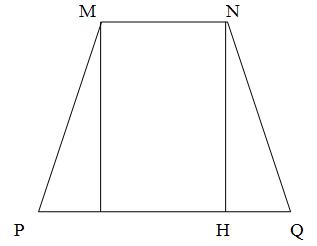
Точка K является серединой отрезка MN, причем http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image007.gif, откуда следует, что http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image008.gif. Так как http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image009.gif, то http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image010.gif. Таким образом, получаем, что http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image011.gif.

**б)** Найдем периметр трапеции MNPQ:

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image012.gif,

где http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image013.gif; http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image014.gif.

Для вычисления сторон http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image015.gif, найдем высоту http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image016.gif (величина SO=2 находится по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника SOC, учитывая, что OC – радиус описанной окружности вокруг равностороннего треугольника и равен http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image017.gif). Длину отрезка NQ найдем из прямоугольного треугольника NHQ (см. рисунок ниже).



Катет NH=KZ=1, а катет HQ равен

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image019.gif

и

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image020.gif.

Получаем значение периметра

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/5_14.files/image021.gif.

Ответ: .

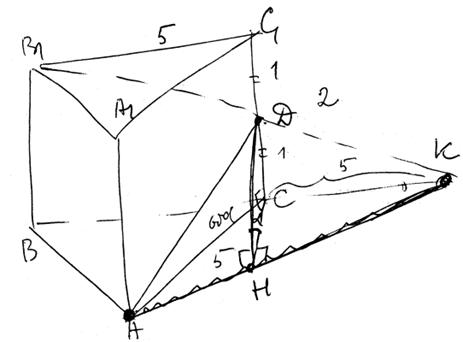
В-9(2016)

В правильной треугольной призме ABCA1B1C1 стороны основания равны 5, боковые рёбра равны 2, точка D — середина ребра СС1.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и ADB1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADB1.

**Решение**

**.** 

**а)** Построение. Отметим точку K как результат пересечения прямой BC и прямой http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image001.gif: т.е. http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image002.gif (см. рисунок). Точка A является общей точкой для плоскостей ABC и http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image003.gif. Следовательно, указанные плоскости пройдут через линию AK (см. рисунок). Данная линия и будет прямой пересечения плоскостей ABC и http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image003.gif.

**б)** Необходимо найти угол DHC (см. рисунок). Рассмотрим треугольник http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image005.gif и подобный ему треугольник http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image006.gif с коэффициентом подобия http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image007.gif (то есть они равны между собой). Отсюда получаем, что http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image008.gif. Имеем равнобедренный треугольник с углом http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image009.gif (так как угол http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image010.gif у равностороннего треугольника ABC). В равнобедренном треугольнике высота CH, проведенная к основанию, является также и биссектрисой. Рассмотрим прямоугольный треугольник CHK, у которого гипотенуза http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image008.gif и прилегающий к ней угол http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image011.gif. Тогда катет CH можно найти как

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image012.gif.

Найдем тангенс угла http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image013.gif между плоскостями из прямоугольного треугольника DCH, получим:

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image014.gif

и угол между плоскостями равен

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/9_14.files/image015.gif.

Ответ: .

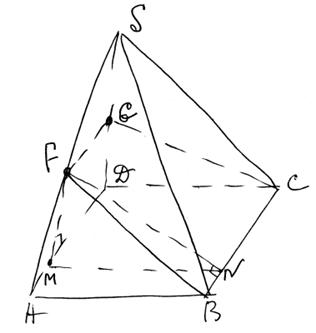
В – 19(2016)

В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD все рёбра равны 1. Точка F — середина ребра AS.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей SAD и BCF.

б) Найдите угол между плоскостями SAD и BCF.

**Решение.**



**а)** Плоскость BCF также будет проходить через точку G, лежащую по середине отрезка SD (см. рисунок), так как для плоскости должно соблюдаться http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/19_14.files/image001.gif, http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/19_14.files/image002.gif и http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/19_14.files/image003.gif. В результате имеем прямую FG, являющуюся линией пересечения плоскостей SAD и BCF.

б) Спроецируем точку F на вектор AD, получим точку M, причем http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/19_14.files/image005.gif. Аналогично построим проекцию точки F на вектор BC, получим точку N и http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/19_14.files/image006.gif. В результате получили треугольник MFN, в котором угол http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/19_14.files/image007.gif будет соответствовать углу между искомыми плоскостями. Найдем данный угол по теореме косинусов, получим:

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/19_14.files/image008.gif.

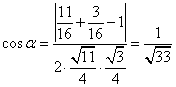
Определим длины сторон треугольника MFN. Рассмотрим прямоугольный треугольник FBN, у которого сторона http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/19_14.files/image009.gif, так как она является медианой равностороннего треугольника со сторонами 1. Длина http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/19_14.files/image010.gif находится из равнобедренной трапеции FGBC. По теореме Пифагора находим катет FN:

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/19_14.files/image011.gif.

Найдем теперь длину FM из прямоугольного треугольника AFM, в котором http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/19_14.files/image012.gif, http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/19_14.files/image013.gif (из равнобедренной трапеции AFGD) и по теореме Пифагора получаем:

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/19_14.files/image014.gif.

Таким образом, косинус угла между плоскостями равен (здесь взят модуль, так как за угол между плоскостями берется острый угол)



и угол

http://self-edu.ru/htm/ege2016_36/files/19_14.files/image016.gif.

Ответ: .

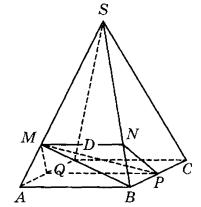
В – 1(2018)

На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды SABCD с основанием ABCD отмечена точка М, причём SM : МА = 5:1. Точки P и Q — середины рёбер ВС и AD соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

**Решение.**



**а)** Пусть N — такая точка на ребре SB, что SN:NB = 5:1. Треугольники SAB и SMN подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. Значит, http://self-edu.ru/htm/2018/ege2018_36/files/1_14.files/image001.gif, а прямые AB и MN параллельны, http://self-edu.ru/htm/2018/ege2018_36/files/1_14.files/image002.gif. Прямая PQ также параллельна прямой АВ. Значит, отрезки MN и PQ параллельны и не равны, и поэтому сечение пирамиды плоскостью MPQ — это трапеция MNPQ.

Треугольники MAQ и NBP равны, поскольку MA = NB, QA = PB, и http://self-edu.ru/htm/2018/ege2018_36/files/1_14.files/image003.gif, поэтому MQ = NP, а значит, трапеция MNPQ равнобедренная.

**б)** Пусть объём пирамиды SABCD равен V. Пятигранник AMQBNP состоит из четырёхугольной пирамиды MABPQ с основанием ABPQ и треугольной пирамиды MBNP с основанием BNP.

Расстояние от точки М до плоскости BNP относится к расстоянию от точки A до этой плоскости как 5:6, а площади треугольников BNP и SBC относятся как 1:12. Значит, отношение объёмов пирамид MBNP и ASBC равно 5:72, то есть объём пирамиды MBNP равен http://self-edu.ru/htm/2018/ege2018_36/files/1_14.files/image005.gif.

Площадь прямоугольника ABPQ составляет половину площади квадрата ABCD. Расстояние от точки М до плоскости ABCD относится к расстоянию от точки S до этой плоскости как 1: 6, поэтому объём пирамиды MABPQ равен http://self-edu.ru/htm/2018/ege2018_36/files/1_14.files/image006.gif.

Таким образом, объём AMQBNP равен http://self-edu.ru/htm/2018/ege2018_36/files/1_14.files/image007.gif то есть отношение объёмов многогранников AMQBNP и CDSNPQM равно .

**Ответ:**

В – 2(2018)

На ребре SA правильной пирамиды ABCD отмечена точка М, причем SA : MA = 1 : 2. Точки P, Q – середины ребер BC и AD соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.

б) Найдите соотношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

O

P

H

Q

N

M

D

C

A

B

S

**Решение.**

а) *Q, P* – середины ребер *AD* и , то , то .

так как

– равнобедренная трапеция.

б) Пусть

у них - общий. То

Ответ: .

В – 3(2018)

На ребре SA правильной пирамиды ABCD отмечена точка М, причем SA : MA = 3 : 4. Точки P, Q – середины ребер BC и AD соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.

б) Найдите соотношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

O

P

Q

N

M

D

C

A

B

S

**Решение.**

а) *Q, P* – середины ребер *AD* и , то , то .

так как

– равнобедренная трапеция.

б) Пусть , то

;

Ответ: .

В – 4(2018)

В пирамиде ABCD рёбра DA, DB, DC попарно перпендикулярны, а AB=BC=AC= 16

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причем

DM : MA = DN : NC = 6 : 1. Найдите площадь сечения MNB.

H

C

N

M

A

D

B

**Решение.**

а)

По теореме Пифагора:

*AB*=*BC* – по условию, то *DA*=*DC*=*DB*.

По теореме Пифагора:

*DABC* – правильная пирамида.

По теореме Пифагора из

.

Ответ:

В-5(2018)

В пирамиде ABCD рёбра DA, DB, DC попарно перпендикулярны, а AB=BC=AC=.

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причем

DM : MA = DN : NC = 2 : 7. Найдите площадь сечения MNB.

H

C

N

M

A

D

B

**Решение.**

а)

б)

Ответ: .