**Задачи № 14 геометрия Профильный уровень.**

В-2 (2016)

В кубе ABCDA1B1C1D1 все ребра равны 3. На ребре BB1 отмечена точка К так, что КВ=4. Через точки К и С1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD1:

а) Докажите, что AP1:PB1 = 3:1, где Р – точка пересечения плоскости α с ребром A1D1/

б) Найти угол наклона плоскости α и плоскости грани BB1C1C.

**Решение:**

D1

B1

А1

D

C

B

А

C1

F

P

K

$ΔD\_{1}BB\_{1}\~∆FKB\_{1}$так как $∠D\_{1}BK$ – общий, $∠KFB\_{1}= ∠BD\_{1}B\_{1}$ – как соответственные углы, то $\frac{D\_{1}B\_{1}}{FK}$=$\frac{B\_{1}B}{B\_{1}K};$

$$\frac{5\sqrt{3}}{FK}=\frac{5}{1}, FK= \sqrt{3}$$

$D\_{1}B^{2}$=$DD\_{1}^{2}+D\_{1}C\_{1}^{2}+A\_{1}D\_{1}^{2}$

$D\_{1}B^{2}$=75, $D\_{1}B$=$\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

$$∆FB\_{1}K. По теореме Пифагора EK^{2}=FB\_{1}^{2}+B\_{1}K^{2}$$

$$(\sqrt{3)}^{2}=FB\_{1}^{2}+1^{2}$$

$$FB\_{1}^{2}=2, FB\_{1}>0, FB\_{1}=\sqrt{2},$$

$$∆A\_{1}C\_{1}F \~∆B\_{1}PF, так как $$

$$∠D\_{1}FC\_{1}=∠PFB-как вертикальные углы$$

$$∠C\_{1}D\_{1}F= ∠FB\_{1}P-как накрест лежищие углы, при D\_{1}C\_{1}∥A\_{1}B\_{1} b секущей D\_{1}B\_{1}$$

$$\frac{D\_{1}C\_{1}}{PB\_{1}}=\frac{D\_{1}F}{B\_{1}F}\_{}$$

$$\frac{5}{PB\_{1}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, PB\_{1}= \frac{5\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{5}{4}$$

$$A\_{1}P=A\_{1}B\_{1}-PB\_{1}=5-\frac{5}{4}=\frac{15}{4};$$

$$\frac{A\_{1}P}{PB\_{1}}=\frac{15}{4}:\frac{5}{4}=\frac{15∙4}{4∙5}=3;$$

Составим уравнение плоскости:

$$\left(KPC\_{1}\right):K\left(5;5;4\right), P\left(5;\frac{15}{4};5\right), C\_{1}\left(0;5;5\right)$$

$$K\left(5;5;4\right), P\left(5;\frac{15}{4};5\right), C\left(0;5;5\right)$$

$$\left\{\begin{array}{c}5a+5b+4b+d=0,\\5a+\frac{15}{4}b+5c+d=0\\5b+5c+d=0.\end{array}\right.,\left\{\begin{array}{c}5a+5b+4c-5b-5c=0,\\5a+\frac{15}{4}b+5c-5b-5c=0,\\d=-5b-5c.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}c=5a,\\5a-\frac{5}{4}b=0,\\d=-5b-25a.\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}c=5a,\\b=4a,\\d=-45a.\end{array}\right.$$

$$ax+4ay+5az-45a=0,$$

$$x+4y+5z-45=0,$$

$$→\left\{1;4;5\right\}$$

$$C\_{1}\left(0;5;5\right), D\_{1}\left(0;0;5\right), $$

$$→\left\{0;-5;0\right\}$$

$$cosα=\frac{20}{\sqrt{25}∙\sqrt{42}}=\frac{20}{5\sqrt{42}}=\frac{4}{\sqrt{42}};$$

$$1+tg^{2}α=\frac{1}{cos^{2}α};tg^{2}α=\frac{42}{16}-1=\frac{42}{16}-\frac{16}{16}=\frac{26}{16};tgα=\frac{\sqrt{26}}{4};$$

$$α=arctg\frac{\sqrt{26}}{4}.$$

Ответ: $arctg\frac{\sqrt{26}}{4}$.

В-3(2016)

В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами АВ=√11 и ВС = 2√3. Длины боковых рёбер пирамиды SA = 5, SB = 6, SD = √37.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

S

D

C

B

А

**Решение.**

**а)** 1. Рассмотрим треугольник SAB со сторонами , , . Так как , то треугольник SAB – прямоугольный с гипотенузой SB и катетами .

2. Рассмотрим треугольник SAD. Его стороны , , . Можно заметить, что

,

следовательно, треугольник SAD прямоугольный с гипотенузой SD и катетами .

3. Так как  и , то ребро  и, следовательно, SA – высота пирамиды.

**б)** По теореме о трех перпендикулярах . Угол между гранью SC и плоскостью ASB будет равен углу CSB.

Рассмотрим прямоугольный треугольник SBC. Тангенс угла CSB равен

.

Следовательно,

,

который соответствует углу между прямой SC и плоскостью ASB.

Ответ: 300

В – 4(2016)

В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания АВ равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки М и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость a содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость a делит медиану СЕ основания в отношении 5:1, считая от точки С.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка С, а основанием — сечение пирамиды SABC плоскостью a.

**Решение.**



**а)** В основании правильной треугольной пирамиды лежит равносторонний треугольник. Проекция высоты S пирамиды на основание дает точку O, которая лежит на пересечении медиан. Таким образом, точка O делит медианы в отношении 2:1, то есть

.

Рассмотрим высоту SE. Точка , расположена точно по центру высоты SE. Следовательно, ее проекция на медиану CE делит отрезок OE пополам. В свою очередь отрезок , тогда

.

В итоге получаем, что точка F делит медиану CE как



или в соотношении 5:1, начиная от точки C.

**б)** Найдем высоту пирамиды CF, которая равна . Длину медианы СЕ найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника BCE:



и

.

Следовательно,

.

Вычислим площадь основания пирамиды (площадь трапеции MNZK). Отрезок , отрезок  (так как это средняя линия треугольника ABS), высота трапеции . Найдем высоту SO из прямоугольного треугольника SOC:

,

тогда

.

Площадь трапеции (основания пирамиды) равна

.

Объем призмы найдем по формуле



Ответ: $\frac{80\sqrt{3}}{3}$.

В – 5(2016)

В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания АВ равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки М и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость a содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость a делит медиану СЕ основания в отношении 5:1, считая от точки С.

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды SABC плоскостью a.

**Решение.**

**а)** Сечение (плоскость ) проходит через точки M и N, причем  - средняя линия. Это означает, что отрезок . По условию секущая плоскость перпендикулярна плоскости ABC, следовательно, она пересекает плоскость ABC по уровню PQ, причем . Таким образом, секущая плоскость представляет собой трапецию PMNQ.



Рассмотрим прямоугольный треугольник SOE, где SO – высота правильной пирамиды. Точка O лежит на пересечении медиан правильного треугольника (в основании пирамиды) и делит их в отношении 2:1, то есть

.

Точка K является серединой отрезка MN, причем , откуда следует, что . Так как , то . Таким образом, получаем, что .

**б)** Найдем периметр трапеции MNPQ:

,

где ; .

Для вычисления сторон , найдем высоту  (величина SO=2 находится по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника SOC, учитывая, что OC – радиус описанной окружности вокруг равностороннего треугольника и равен ). Длину отрезка NQ найдем из прямоугольного треугольника NHQ (см. рисунок ниже).



Катет NH=KZ=1, а катет HQ равен



и

.

Получаем значение периметра

.

Ответ: $8+2\sqrt{2}$.

В-9(2016)

В правильной треугольной призме ABCA1B1C1 стороны основания равны 5, боковые рёбра равны 2, точка D — середина ребра СС1.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и ADB1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADB1.

**Решение**

**.** 

**а)** Построение. Отметим точку K как результат пересечения прямой BC и прямой : т.е.  (см. рисунок). Точка A является общей точкой для плоскостей ABC и . Следовательно, указанные плоскости пройдут через линию AK (см. рисунок). Данная линия и будет прямой пересечения плоскостей ABC и .

**б)** Необходимо найти угол DHC (см. рисунок). Рассмотрим треугольник  и подобный ему треугольник  с коэффициентом подобия  (то есть они равны между собой). Отсюда получаем, что . Имеем равнобедренный треугольник с углом  (так как угол  у равностороннего треугольника ABC). В равнобедренном треугольнике высота CH, проведенная к основанию, является также и биссектрисой. Рассмотрим прямоугольный треугольник CHK, у которого гипотенуза  и прилегающий к ней угол . Тогда катет CH можно найти как

.

Найдем тангенс угла  между плоскостями из прямоугольного треугольника DCH, получим:



и угол между плоскостями равен

.

Ответ: $arctg\frac{2}{5}$.

В – 19(2016)

В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD все рёбра равны 1. Точка F — середина ребра AS.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей SAD и BCF.

б) Найдите угол между плоскостями SAD и BCF.

**Решение.**



**а)** Плоскость BCF также будет проходить через точку G, лежащую по середине отрезка SD (см. рисунок), так как для плоскости должно соблюдаться ,  и . В результате имеем прямую FG, являющуюся линией пересечения плоскостей SAD и BCF.

б) Спроецируем точку F на вектор AD, получим точку M, причем . Аналогично построим проекцию точки F на вектор BC, получим точку N и . В результате получили треугольник MFN, в котором угол  будет соответствовать углу между искомыми плоскостями. Найдем данный угол по теореме косинусов, получим:

.

Определим длины сторон треугольника MFN. Рассмотрим прямоугольный треугольник FBN, у которого сторона , так как она является медианой равностороннего треугольника со сторонами 1. Длина  находится из равнобедренной трапеции FGBC. По теореме Пифагора находим катет FN:

.

Найдем теперь длину FM из прямоугольного треугольника AFM, в котором ,  (из равнобедренной трапеции AFGD) и по теореме Пифагора получаем:

.

Таким образом, косинус угла между плоскостями равен (здесь взят модуль, так как за угол между плоскостями берется острый угол)



и угол

.

Ответ: $arccos\frac{1}{\sqrt{33}}$.

В – 1(2018)

На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды SABCD с основанием ABCD отмечена точка М, причём SM : МА = 5:1. Точки P и Q — середины рёбер ВС и AD соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

**Решение.**



**а)** Пусть N — такая точка на ребре SB, что SN:NB = 5:1. Треугольники SAB и SMN подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. Значит, , а прямые AB и MN параллельны, . Прямая PQ также параллельна прямой АВ. Значит, отрезки MN и PQ параллельны и не равны, и поэтому сечение пирамиды плоскостью MPQ — это трапеция MNPQ.

Треугольники MAQ и NBP равны, поскольку MA = NB, QA = PB, и , поэтому MQ = NP, а значит, трапеция MNPQ равнобедренная.

**б)** Пусть объём пирамиды SABCD равен V. Пятигранник AMQBNP состоит из четырёхугольной пирамиды MABPQ с основанием ABPQ и треугольной пирамиды MBNP с основанием BNP.

Расстояние от точки М до плоскости BNP относится к расстоянию от точки A до этой плоскости как 5:6, а площади треугольников BNP и SBC относятся как 1:12. Значит, отношение объёмов пирамид MBNP и ASBC равно 5:72, то есть объём пирамиды MBNP равен .

Площадь прямоугольника ABPQ составляет половину площади квадрата ABCD. Расстояние от точки М до плоскости ABCD относится к расстоянию от точки S до этой плоскости как 1: 6, поэтому объём пирамиды MABPQ равен .

Таким образом, объём AMQBNP равен  то есть отношение объёмов многогранников AMQBNP и CDSNPQM равно $\frac{17}{127}$.

**Ответ:** $\frac{17}{127}$

В – 2(2018)

На ребре SA правильной пирамиды ABCD отмечена точка М, причем SA : MA = 1 : 2. Точки P, Q – середины ребер BC и AD соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.

б) Найдите соотношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

O

P

H

Q

N

M

D

C

A

B

S

**Решение.**

а) *Q, P* – середины ребер *AD* и $BC$, то $PQ∥AB, M\in (SAB)$, то $MN∥AB$.

$∆AQM=∆BPN, $так как $AQ=BP, AM=BN, ∠MAP=∠NBP, то MP=NP$

$QMNP$ – равнобедренная трапеция.

б) Пусть $V\_{SABCD}=V$

$$V\_{AMQBNP}=V\_{MABPQ}+V\_{MBNP}$$

$$\frac{MN}{AB}=\frac{SM}{SA}=\frac{1}{3}$$

$∆SBC=∆BNP $у них$∠SBC $ - общий. То

$$\frac{S\_{BNP}}{S\_{SBC}}=\frac{BN∙BP}{SB∙BC}=\frac{2}{3}∙\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{V\_{MBNP}}{V\_{ASBC}}=\frac{1}{18}V\_{SABCD } , S\_{ABPQ}=\frac{1}{2}S\_{ABCD} то V\_{MABCD}=\frac{2}{3}∙\frac{1}{2}V=\frac{1}{3}V$$

$$V\_{MNPBAQ}=\frac{1}{18}V+\frac{1}{3}V=\frac{7}{18}V$$

$$V\_{SMNPCDQ}=V-\frac{7}{18}V=\frac{11}{18}V$$

$$\frac{V\_{MNPBAQ}}{V\_{SMNPCDQ}}=\frac{7}{18}V:\frac{11}{18}V=\frac{7}{11}$$

Ответ: $\frac{7}{11}$.

В – 3(2018)

На ребре SA правильной пирамиды ABCD отмечена точка М, причем SA : MA = 3 : 4. Точки P, Q – середины ребер BC и AD соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.

б) Найдите соотношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

O

P

Q

N

M

D

C

A

B

S

**Решение.**

а) *Q, P* – середины ребер *AD* и $BC$, то $PQ∥AB, M\in (SAB)$, то $MN∥AB$.

$∆AQM=∆BPN, $так как $AQ=BP, AM=BN, ∠MAP=∠NBP, то MP=NP$

$QMNP$ – равнобедренная трапеция.

б) Пусть $V\_{SABCD}=V$, то

$V\_{MAQPB}=\frac{2}{7}V, так как AM:SA= \frac{4}{7} и \frac{S\_{ABPQ}}{S\_{ABCD}}=\frac{1}{2} $;

$$∆BNP и ∆BSC, у них ∠SBC-общий, следовательно$$

$$ \frac{S\_{BNP}}{S\_{SBC}}=\frac{BN∙BP}{BS∙BC}=\frac{4}{7}∙\frac{1}{2}=\frac{2}{7} $$

$$\frac{MN}{AB}=\frac{3}{7} то \frac{V\_{MNBP}}{V\_{ASBC}}=\frac{2}{7}∙\frac{3}{7}=\frac{6}{49} $$

$$\frac{V\_{MNBP}}{V\_{SABC}}=\frac{6}{49}∙\frac{1}{2}V=\frac{3}{49}V $$

$$V\_{MNABPQ}=\frac{3}{49}V+\frac{2}{7}V=\frac{17}{49}V $$

$$V\_{SMNPCDQ}=V-\frac{17}{49}V= \frac{32}{49}V $$

$$\frac{V\_{MNPBAQ}}{V\_{SMNPCDQ}}=\frac{17}{49}V∶\frac{32}{49}V=\frac{17}{32 } $$

Ответ: $\frac{17}{32}$.

В – 4(2018)

В пирамиде ABCD рёбра DA, DB, DC попарно перпендикулярны, а AB=BC=AC= 16

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причем

DM : MA = DN : NC = 6 : 1. Найдите площадь сечения MNB.

H

C

N

M

A

D

B

**Решение.**

а) $∆ DAB- прямоугольный ∆DBC-прямоугольный $

По теореме Пифагора:

$DA^{2}=AB^{2}-DB^{2} DC^{2}=BC^{2}-DB^{2}$

*AB*=*BC* – по условию, то *DA*=*DC*=*DB*. $∆ADC-прямоугольный$

По теореме Пифагора:$ DA^{2}=AB^{2}-DC^{2}$

*DABC* – правильная пирамида.

$∆ADC∼∆DMN, так как ∠ADC- общий$

$$DM :DA=DN :DC=6 :7$$

$$MN=\frac{6}{7}AC=\frac{6}{7}∙14=12$$

$$DM= \frac{6}{7}DA$$

По теореме Пифагора из $∆DMB, DB=x, MD= \frac{6}{7}x$

$$MB^{2}=MD^{2}+DB^{2}$$

$$MB^{2}=x^{2}+\frac{36}{49}x^{2}=\frac{85}{49}x^{2}$$

$$MB^{2}=\frac{85}{49}∙49∙2=170;MB= \sqrt{170}$$

$$∆MNB-равнобедренный. MH=HN= \frac{1}{2}∙12=6.$$

$∆BHN по теореме Пифагора BH= \sqrt{BN^{2}-HN^{2}}=\sqrt{170-36}=\sqrt{134}$.

$$S=\frac{1}{2}MN∙BH=\frac{1}{2}∙12\sqrt{134}=6\sqrt{134}.$$

Ответ: $6\sqrt{134}.$

В-5(2018)

В пирамиде ABCD рёбра DA, DB, DC попарно перпендикулярны, а AB=BC=AC=$9\sqrt{2}$.

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причем

DM : MA = DN : NC = 2 : 7. Найдите площадь сечения MNB.

H

C

N

M

A

D

B

**Решение.**

а) $∆ABC-правильный, так как AB=BC=AC.$

$$∆ADB, ∆ADC,∆BDC-прямоугольные. По теореме Пифагора:$$

$$AD^{2}=AB^{2}-DB^{2}, AD^{2}=AC^{2}-DC^{2} то AD=DC.$$

$$DB^{2}=BC^{2}-DC^{2} то DB=AD, т.е. AD=DC=DB, следовательно DABC-правильная пирамида.$$

б) $∆DMN\~∆DAC, так как ∠ ADC-общий.$

$$DM :DA=DN :DC= \frac{2}{9} то MN= \frac{2}{9}AC= \frac{2}{9}∙9\sqrt{2}=2\sqrt{2.}$$

$$∆DAB-прямоугольный DA=DB=x, по теореме Пифагора $$

$$AB^{2}=AD^{2}+DB^{2} $$

$$ AB^{2}=x^{2}+x^{2}, $$

$$AB^{2}=2x^{2}, $$

$$81∙2=2x^{2}, $$

$$x^{2}=81, x>0,$$

$$ x=9$$

$$DA=DB=9.$$

$$MD=\frac{2}{9}AD=\frac{2}{9}∙9=2$$

$$∆MDB-прямоугольный, по теореме Пифагора:$$

$$DB^{2}=MD^{2}+MB^{2},$$

$$81=4+MB^{2},$$

$$MB^{2}=77, MB>0, так как ∆ADB= ∆DBC. $$

$$∆MNB-равнобедренный, BH⊥MN, то $$

$$∆BHN-прямоугольный. По теореме Пифагора: $$

$$BH=\sqrt{BN^{2}-HN^{2}}=\sqrt{77-4}=\sqrt{73}.$$

$$S\_{BMN}=\frac{1}{2}MN∙BH=\frac{1}{2}∙2\sqrt{2}∙\sqrt{73}=\sqrt{146}.$$

Ответ: $\sqrt{146}$.